Работа 1.4.1. Изучение колебаний физического маятника

Выполнил:Идрисов Сергей Ринатович  
Физтех-школа электроники, фотоники и молекулярной физики.

1 курс.

**Цель работы**:

1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями.

2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения.

3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника.

4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

**В работе используются**:

* металлический стержень с опорной призмой;
* дополнительный груз;
* закреплённая на стене консоль;
* подставка с острой гранью для опре-деления цента масс маятника; секундомер;
* счётчик колебаний (механический или электронный);
* линейки металлические различной длины; штангенциркуль;
* элек-тронные весы;
* математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

**Введение**

A diagram of a metal pole

Description automatically generated *Физическим маятником* называют *твёрдое тело*, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Основное отличие физического маятника от математиче-ского в том, что маятник не является точечным объектом, а

представляет собой совокупность жёстко связанных то-чечных масс. В данной работе в качестве такого маятника используется тонкий однородный металлический стер-жень, подвешиваемый в некоторой точке с помощью не-большой опорной призмы (см. рис. 1). Острое ребро призмы, опирающееся на подставку, задаёт *ось качания* (или вращения) маятника.

A diagram of a line with letters and numbers

Description automatically generated**Экспериментальная установка**

Тонкий стальной стержень длиной 𝑙=0,999 м и массой 𝑚=0,890кг подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Диаметр стержня много меньше его длины 𝑑≪𝑙. Небольшая призма крепится на стержне винтом и острым основанием опирается на поверхность закреплённой на стене консоли. Острие ребра призмы образует ось качания маятника. Подвесная призма остаётся неподвижной (𝑎=const), а на стержень маятника насаживается дополнительное тело небольшого размера («чечевица» или цилиндр), положение которого можно изменять, изменяя таким образом момент инерции маятника. Период колебаний маятника в этой схеме измеряется электронным счетчиком импульсов, расположенном у нижнего конца стержня (рис.3).

Как известно, для динамики движения точечной массы 𝑚 под действием силы 𝐹 вдоль некоторой прямой справедливо уравнение Ньютона:

(1)

где 𝑝=𝑚𝑣 — импульс, 𝑣— скорость тела. Рассмотрим точечную массу, движущуюся по окружности фиксированного радиуса 𝑟 с угловой скоро-стью 𝜔. Её скорость линейная скорость 𝑣=𝜔 𝑟. При вращательном движе-нии определяющую роль играет не сила, а её *момент* относительно оси вращения — произведение силы на её *плечо*, — равный в данном случае 𝑀=𝐹 𝑟. Тогда, умножая уравнение Ньютона с обеих сторон на 𝑟, получим следующее уравнение вращательного движения точки:

(2)

где введено обозначение . Величину называют *моментом инерции* точечного тела.

(3)

где 𝑟𝑖 — расстояние от точки массой 𝑚𝑚𝑖𝑖 до оси вращения. Видно, что мо-мент инерции зависит от массы тела, его формы, а также от положения оси вращения. Как показывается в курсах механики, момент инерции тонкого стержня массой 𝑚 и длиной 𝑙, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс, равен

(4)

А момент инерции стержня, подвешенного на расстоянии 𝑎𝑎 от центра масс, может быть вычислен по *теореме Гюйгенса–Штейнера*

(5)

Чтобы получить формулу периода колебаний физического маятника, воспользуемся аналогией с пружинным маятником, период колебаний ко-торого равен, как известно, . Здесь роль массы 𝑚, как мы уже обсудили, играет момент инерции тела 𝐽, а роль коэффициента жёсткости пружины 𝑘 — коэффициент пропорциональности между моментом силы и величиной отклонения 𝑚*g*𝑎. Таким образом, приходим к следующей об-щей формуле для периода колебаний произвольного физического маятника:

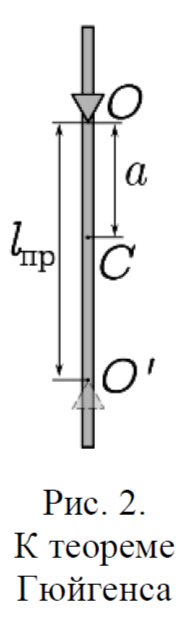
(6)

А для стержня длиной 𝑙, подвешенного на расстоянии 𝑎 от центра, c учётом (5) получаем:

(7)

Сравним результат с известной формулой для математического маятника:

(8)

Определим так называемую *приведённую длину* физического маятника:

(9)

Смысл этой длины в том, что физический маятник длиной 𝑙, подвешенный в точке 𝑎, имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длиной 𝑙пр.

С понятием «приведённой длины» связана следующая теорема (*Гюйгенса*). Рассмотрим точку 𝑂𝑂′, отстоящую от точки опоры 𝑂𝑂 на расстояние 𝑙пр вдоль стержня (эту точку иногда называют *центром качания* физического маятника)(рис.2). Оказывается, если маятник подвесить за точку 𝑂𝑂′, то период его качания *не изменится*. Иными словами, точка опоры и центр качания маятника взаимно обратимы. Доказательство осуществляется прямым расчётом по формуле (7) или (9).

**Особенности маятника с перемещаемым грузом (установка Б)**

Если на стержень насадить груз, то момент инерции маятника, а значит и период его колебаний, будет зависеть от положения груза относительно оси качания.

В качестве подвижного груза в работе используется металлический ци-линдр или «чечевица». Поскольку размер груза мал по сравнению с длиной стержня, его можно считать закреплённой на стержне *точечной массой*. Обозначим за 𝑦 рас-стояние от точки подвеса 𝑂 до центра масс груза (см. Рис. 3). Тогда момент инерции маятника будет равен:

(10)

где 𝐽0 — момент инерции маятника без груза, определяе-мый по формуле (5). Поскольку точка подвеса в схеме Б фиксирована, величина 𝐽0 в опыте остаётся постоянной.

Заметим, что величину 𝑦 на практике измерить напря-мую затруднительно, поскольку положение центра масс груза точно не известно. Вместо этого можно измерить положение центра масс маятника с грузом и без него. Пусть 𝑥ц0 — расстояние от точки подвеса (острия призмы) до центра масс маятника без груза. Тогда центр масс маятника с грузом находится в точке

*(11)*

где 𝑚0 — масса маятника без груза (стержня вместе с призмой), 𝑀=𝑚0+𝑚г — полная масса маятника.

Заметим, что положение центра масс груза достаточно измерить только один раз, а затем измерять *смещение* Δ𝑦 груза относительно некоторого ис-ходного положения 𝑦0.

Из общей формулы (6) найдём период колебаний маятника грузом:

(12)

Отсюда видно, что если построить зависимость величины 𝑢=𝑇2𝑥ц от 𝑣=𝑦2, то график должен иметь вид прямой линии. По её наклону можно

определить ускорение свободного падения *g*, а по вертикальному смещению — момент инерции 𝐽0 маятника.

**Ход работы:**

1). Определение приборной погрешности у каждого из измерительных приборов.

**Секундомер:** 0,03 сек

**Линейка:** 1мм

**Штангенциркуль:** 0,1мм

Оценим, с какой относительной по-грешностью имеет смысл измерять период колебаний маятника.

2). Определение длины стержня, массы груза и отношения .

Стержень измерим штангенциркулем, его длина равна L = 99,90 ± 0,01 (см)

Массы призмы и стержня измерим на весах марки ВЛТЭ-5100:

3). Определения центра масс стержня.

Экспериментально найдём центр масс стержня, положив его центр на железную пластину и поймав равновесие. При этом надо учесть толщину пластины и сравнить её с погрешностью линейки:

Толщина пластины = 1,8 (мм) = 0,18мм > 0,1 мм

Тогда погрешность будет считаться по тольщине пластины и будет равна:

ЦМ = 49,9 ± 0,18 (см)

4). Определение центра масс установки.

После того, как мы повесили призму обратно на стержень, повторно найдём её центр масс:

Толщина призмы = 2,34±0,01(см)

Расстояние от края стержня до призмы = 23,6 ± 0,1(см)

Так как данная относительная погрешность больше, чем в пункте 1, будем ориентироваться на неё.

5). Проведём предварительный опыт без дополнительного груза и определим случайную погрешность измерений времени с помощью секундомера.

1. Установим маятник на консоли и отклоним его на малый угол (не более 5∘). Убедимся, что он качается без помех, призма не проскальзывает, и колебания затухают слабо.
2. Измерим время 𝑛=20 полных колебаний маятника.

t = 30.75 (c)

1. Вычислим период колебаний 𝑇=𝑡/𝑛 и рассчитаем *предварительное* значение *g*. Оно должно отличаться от табличного не более, чем на 10%.

Найдём g по формуле (7). g

1. Повторите измерение периода фиксированного числа колебаний (𝑛=20), *каждый раз* останавливая и *заново* отклоняя маятник примерно на один и тот же малый угол; результаты занесём в таблицу 1. Если результаты 3–4 измерений полностью совпадают, опыт можно остановить. Если результаты различаются, следует провести 8–10 измерений.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | Ср. |
| *t*, c | 30,75 | 30,76 | 30,76 | 30,76 | 30,7575 |
| *T*, c | 1,5375 | 1,538 | 1,538 | 1,538 | 6,1515 |
|  | 0,0075 | 0,0025 | 0,0025 | 0,0025 | 0,00375 |

**Таблица 1**. Результаты измерений периода колебаний маятника без дополнительного груза.

Так как результаты опытов почти равны, то случайной погрешностью можно пренебречь.

1. Определим приборную погрешность используемого секундомера и вычислим полную погрешность измерения времени.

так как мы не учитываем погрешность, связанную с реакцией человека.

1. Используя погрешность измерения времени из предыдущего пункта, оценим число колебаний 𝑛, по которому следует измерять пе-риод, чтобы относительная погрешность измерений *периода* соответ-ствовала точности измерений , оценённой в п. 1

n=20 будет хватать с запасом.

6). Определите положение центра масс дополнительного груза.

7). Проведём измерение периода колебаний маятника с дополнительным грузом, результаты запишем в таблицу 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | y, мм | a,мм | ,мм | n | t, c | T, с | g, |
| 1 | 687,6 | 21,86 | 321,2 | 20 | 32,16 | 1,608 | 9,85 |
| 2 | 626,0 | 21,86 | 306,1 | 20 | 31,36 | 1,5678 | 9,83 |
| 3 | 564,4 | 21,86 | 290,9 | 20 | 30,60 | 1,53 | 9,81 |
| 4 | 502,9 | 21,86 | 275,7 | 20 | 29,92 | 1,496 | 9,80 |
| 5 | 441,3 | 21,86 | 260,6 | 20 | 29,25 | 1,4625 | 9,83 |
| 6 | 379,8 | 21,86 | 245,4 | 20 | 28,76 | 1,438 | 9,83 |
| 7 | 318,1 | 21,86 | 230,2 | 20 | 28,43 | 1,4215 | 9,83 |
| 8 | 256,6 | 21,86 | 215,1 | 20 | 28,19 | 1,4095 | 9,89 |
| 9 | 195,0 | 21,86 | 199,9 | 20 | 28,29 | 1,4145 | 9,89 |
| 10 | 133,4 | 21,86 | 184,7 | 20 | 28,60 | 1,43 | 9,95 |
| 11 | 71,8 | 21,86 | 169,6 | 20 | 29,29 | 1,4645 | 10,00 |

Таблица 2. Результаты эксперимента и g.

Расчёты проводятся по формулам (5) и (12). Также для определения центра масс используется формула (11).

8)Для оценки затухания измерим число колебаний, за которое их амплитуда уменьшается в 2 раза. Оценим время затухания 𝜏зат, декремент затухания 𝛾 и добротность 𝑄 колебательной системы.

Амплитуда колебаний стержня уменьшилась вдвое 𝐴1=𝐴0/2 за 𝑛=77 колебаний. Тогда из соотношения = 0,5 находим время затухания и добротность .

9) Cреднее значение g = 9,86

*=* 0,0596

A graph with a red line

Description automatically generated10) Построим график зависимости периода T от положения груза y.

11) Постройте график, откладывая по оси абсцисс величину 𝑢=𝑇^2𝑥ц, а по оси ординат величину 𝑣=𝑦^2.

12) C помощью МНК определим наилучшую прямую и построим график для пункта 11.

k = 3.33, b = 0.25

g = 13.068

A graph with red lines

Description automatically generatedA graph with blue dots

Description automatically generated13) Сравним результаты пункта 12 и пункта 9. Очевидно, что в пункте 12 больше погрешность и результат сильно отличается от табличного, возможно это связано с тем, что была не правильно определена зависимость.

**Вывод:**

В ходе работы мы познакомились с случайными и приборными погрешностями, научились определять необходимое количество измерений основываясь на приборных погрешностях, доказали справедливость используемых формул и научились расчитывать погрешности для косвенных и прямых измерений, познакомились с физическим маятником и его особенностями.